TD$_{18}$ – Géométrie du plan et de l'espace

Exercice 1 ★

Dans le plan $\mathcal{P}$ donner, pour chacune des droites suivantes :

— Un vecteur directeur
— Un vecteur normal
— Une représentation paramétrique
— Une équation cartésienne

1. $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par $A(1,0)$ et $B(-2,-3)$
2. $\mathcal{D}_2$ est la droite d'équation $3x+2y=5$
3. $\mathcal{D}_3$ est la droite passant par $C(-1,1)$ et de vecteur directeur $-3\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$
4. $\mathcal{D}_4$ est la droite passant par $D(0,2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$.

Exercice 2 ★

Soit $(\mathcal{C})$ l'ensemble des points $M(x,y)$ vérifiant $x^2+y^2-2x-4y+1=0$.

1. Montrer que $(\mathcal{C})$ est un cercle et donner son centre et son rayon.
2. Déterminer les tangentes à $(\mathcal{C})$ passant par $A(-1,0)$

Exercice 3 ★

On se place dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$. Donner

1. Une base du plan $\mathcal{P}_1$ passant par les points $A(3,1,0)$, $B(2,2,2)$ et $C(-1,5,0)$. En déduire une représentation paramétrique de ce plan
2. Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$ passant par $A(0,1,0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{u}=-2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$.
3. Un équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_3$ passant par $A(1,1,0)$ et admettant pour base $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v}=3\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}$. Donner un vecteur normal de $\mathcal{P}_3$.

Exercice 4 ★

Soit $a\in\mathbb{R}$ et $D=\{(2-2t,1+t,t)\ ,\ t\in\mathbb{R}\}$ et $D'=\{(-1+t,2-3t,a+2t)\ ,\ t\in\mathbb{R}\}$.

1. D et D' sont-elles parallèles ?
2. Déterminer a pour que D et D' soient sécantes.
3. Déterminer alors une équation cartésienne du plan contenant D et D'.

Exercice 5 ★

On se place dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. Soit D_1 la droite d'équation cartésienne $x+2y-3=0$, D_2 la droite d'équation cartésienne $2x+3y-5=0$ et soit $A(-1,-1)$ et $B(1,4)$.

1. Déterminer une équation de la droite parallèle à D_1 passant par A.
2. Déterminer une équation de la droite perpendiculaire à D_2 passant par B.

Exercice 6 ★

Soit $A(1,-1,-1)$, $B(3,2,1)$ et $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$. On note D la droite passant par B et dirigée par $\overrightarrow{u}$. Trouver une équation cartésienne du plan P contenant le point A et la droite D.

Exercice 7 ★

On considère le vecteur $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$ et les deux droites

$$D_1\ :\ \begin{cases} y=0\\ z=1\end{cases}\qquad D_2\ :\ \begin{cases} x=1\\ z=0\end{cases}$$

Déterminer la droite Δ dirigée par $\overrightarrow{u}$ et qui coupe D_1 et D_2.

Exercice 8 ★

Soit C le cercle passant par les points $A(1,-2)$, $B(4,2)$ et $C(1,4)$.

1. Déterminer le centre et le rayon de C.
2. Donner une équation cartésienne de C.

Exercice 9 ★

Soit P le plan d'équation $x+y+z=1$ et P' le plan d'équation $x=y$. Soit $A(1,2,3)$. Déterminer les distances $d(A,P)$, $d(A,P')$ et $d(A,P\cap P')$.

Exercice 10 ★★

Dans le plan affine euclidien, soit $D : y=2x+1$, $D' : y=2x+7$ et $D'' : y=-\dfrac{x}{2}$.
Déterminer tous les cercles tangents simultanément à D, D' et D''.

Exercice 11 ★

Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on définit la droite du plan D_λ d'équation : $(1-\lambda^2)x+2\lambda y+(\lambda^2-2\lambda-3)=0$.

1. Déterminer l'ensemble des points M par lesquels il passe (au moins) une droite D_λ.
2. Déterminer l'ensemble des points M par lesquels il passe deux droites D_λ et D_μ perpendiculaires.

Exercice 12 ★★

Soit D la droite d'équation $y=x-1$ et $M_0(x_0,y_0)$ un point du plan.

1. Déterminer les coordonnées des symétriques M_1, M_2 et M_3 de M_0 par rapport à D, (Ox) et (Oy).
2. Déterminer l'ensemble (E) des points M_0 tels que M_1, M_2 et M_3 sont alignés.

Exercice 13 ★★

Déterminer l'équation de la sphère contenant les cercles d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ z=0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ z=2. \end{array}\right.$$

Exercice 14 ★★

L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit D la droite passant par le point $A(1,1,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1,2,1)$. Soit P le plan d'équation $2x+y-z-3=0$.

1. Montrer que D n'est pas orthogonale à P.
2. Déterminer une équation du plan P' contenant D et perpendiculaire à P.

Exercice 15 ★★★

Soit (ABC) un triangle équilatéral du plan, et soit M un point variable décrivant l'intérieur de ce triangle. Montrer qu'alors, la somme des distances de M aux côtés de ce triangle reste constante.

Exercice 16 ★

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère le plan P d'équation $x+2y-z-3=0$ et la droite d'équation

$$\left\{\begin{array}{l} 3x-y+z=0 \\ x+y-z+1=0 \end{array}\right.$$

Déterminer la droite D' symétrique de D par rapport au plan P.

Exercice 17 ★★★

On considère la famille de droite $(D_\lambda)_{\lambda\in[0,1]}$ d'équations respectives $D_\lambda : (1-\lambda)x + \lambda y - \lambda(1-\lambda) = 0$.

Déterminer une enveloppe de cette famille de droite.

Exercice 18 ★★★

Dans le plan affine euclidien, on considère deux demi-droites orthogonales D et D' de même origine O, et des points M et M' respectivement sur D et D' tels que l'aire du triangle OMM' soit égale à un réel strictement positif donné a^2. Déterminer l'enveloppe de la famille de droites (MM') lorsque M décrit D.

Exercice 19 ★★★

Soit D une droite du plan et A un point hors de D. Déterminer l'enveloppe de la normale en M à (AM) lorsque M parcourt D.

Exercice 20 ★★★

Soit quatre points $A(1,2,3)$, $B(2,3,1)$, $C(3,1,2)$ et $D(1,0,-1)$. Déterminer, en justifiant son existence, le centre et le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

Exercices issus d'oraux

Exercice 21 ★★★
(Oral 2008)

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle centré au point $A(1,0)$ et de rayon 2.

Déterminer et étudier l'ensemble des centres des cercles $(\mathcal{C}')$ tangents à $(\mathcal{C})$ et à la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $x=0$.

Exercice 22 ★★★
(Oral 2013)

Soit A, B et C trois points non alignés du plan affine euclidien.

1. Soit M un point du plan. Montrer que
$$\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC}\rangle + \langle \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CA}\rangle + \langle \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{AB}\rangle = 0$$
2. Montrer l'existence et l'unicité de l'orthocentre H du triangle ABC.
3. Montrer qu'il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$. Montrer que ce point est le centre de gravité du triangle ABC
4. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC Trouver le point P tel que $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$
5. Montrer que O, H et G sont alignés.

Exercice 23 ★★
(Oral 2017, 2019)

Dans le plan on considère le point $A(2,3)$ et le cercle $(\mathcal{C})$ d'équation $x^2+y^2-2x+\dfrac{4}{5}=0$

Trouver les équations des tangentes à $(\mathcal{C})$ passant par A.

Exercice 24 ★★★
(Oral 2017)

Dans le plan on considère deux points $M(0,y_M)$ et $N(x_N,0)$ avec $2y_M = 2-x_N$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (MN).
2. Déterminer et étudier l'enveloppe de la famille des droites (MN).
3. Que représente cette enveloppe ?

Exercice 25 ★★★
(Oral 2018)

Soit C un cercle du plan et soit A un point fixe du cercle. On note H le projeté orthogonal de A sur la tangente au cercle en M.

1. Paramétrer le problème.
2. Déterminer les points M et N de C pour lesquels l'aire de MNH est maximale.

Exercice 26 ★★
(Oral 2018)

Soit C le cercle de centre $(2,0)$ et de rayon 1. Soit D la droite d'équation $x=0$.

Déterminer et représenter le lieu des centres des cercles tangents à C et à D.

Exercice 27 ★★★
(Oral (2024))

Pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ on définit $C(t)$ de coordonnées $(\cos(t), \sin(t))$ et D_t l'image de la droite parallèle à l'axe des abscisse passant par $C(t)$ par la symétrie orthogonale par rapport à la droite $(OC(t))$

1. Donner un vecteur directeur de D_t et une représentation paramétrique
2. Déterminer l'enveloppe des droites $(D_t)_{t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$
3. Tracer cette enveloppe